

5. Wiberg K., Boyd R.H. Application of strain energy minimization to the dynamics of conformational changes. - J.Amer. chem. Soc, 1972, v. 94, No.24, p. 8426-8430.
6. Komernicki A., McIver J.W. Jr. Structure of transition states in organic reactions. II. MINDO (2) Study of the cyclohexane inversion. - J.Amer. chem. Soc., 1973, v. 95, No.14, p. 4512-4517.
7. Pedinoff M.E. Absorption of ultrasonic waves in pyremethylcyclohexanes. - J. Chem. phys., 1962, v. 36, No.3, p. 777-783.
8. Piercy J.E., Subrahmanyam S.Y. Ultrasonic relaxation axial-equatorial isomerisation in methyl cyclohexane. - J.Chem. phys., 1965, v. 42, No.11, p. 4011-4017.
9. Moran A.K., Walker S.M., Ultrasonic Relaxation in caprolactam. - J. Mol. Struct., 1971, v.9, No.3, p. 299-304.
10. Eccleston G., Pethrick R.A., Wyn-jones E., Hamblin P.S., White R.P. Molecular Acoustics. III. Ultrasonic Relaxation and Ring inversion in some Cyclic Sulphites.- Trans. par. Soc., 1970, v. 66, part 2, p. 310-315.
11. Жижин, Г.Н., Стерин, Х.Е. Спектры инфракрасного поглощения циклогексана и его симметрично замещенных при низких температурах. [Текст] / Г.Н. Жижин, Х.Е. Стерин // Опт. спектр., 1965, т. 19, №1, с. 55-64.
12. O'Keilly D.E., Peterson E.M., Hogenboom D.L. Self-Diffusion coefficients and rotational correlation times in polar liquids. V. Cyclohexane, cyclohexanone, and cyclohexanol. - J. Chem. phys., 1972, v.57, No.9, p. 3969-3976.
13. Роговой, В.Н., Жижин, Г.Н. Фононный спектр циклогексана и параметр порядка вблизи фазового перехода [Текст] / В.Н. Роговой, Г.Н. Жижин // ФТТ., 1975, т. 17, №2, с. 376-380.
14. Мухтаров, Э.И., Роговой, В.Н., Красюков, Ю.Н., Жижин, Г.Н. Исследование фазового перехода в кристаллах циклогексана и дейтероциклогексана по фононным спектрам. [Текст] / Э.И. Мухтаров, В.Н. Роговой и др. // Опт. спектр., 1979, т. 46. -№5. - с. 920-925
15. Jonas J., Hasha D., Huang S.G. Self-diffusion and viscosity of methylcyclohexane in the dense liquids region. - J. Chem. phys., 1979, v. 71, No.10, p. 3996-4000.

DOI: <https://doi.org/10.69722/1694-8211-2025-62-19-25>

УДК: 517.968:511.521

Сраждинов А., канд. физ.-мат. наук, проф.

Srazhidinov.adi@gmail.com

ORCID: 0009-0006-8303-6050

*Кызылкийский гуманитарно-педагогический
институт БатГУ
г. Баткен, Кыргызстан*

**СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ:
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА
НА ПРИМЕРЕ $x^3 + y^3 + z^3 = 0$**

Среди математиков трудно найти человека, который не знаком и не занимающийся решением уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, или $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ в целых числах. Обобщение этой задачи есть Великая теорема Ферма, утверждающая, что уравнения $x^n + y^n + z^n = 0$ не имеет решений в целых числах x, y, z и $xyz \neq 0$, $n \geq 3$ -натуральное число. Эта теорема была сформулирована в 1637 году великим французским математиком и логиком П. Ферма. И было

замечено, что он нашел поистине удивительное доказательство. Однако, П. Ферма не оставил доказательства письменно, кроме случая $n=4$. В 1753 году известный математик Л. Эйлер доказал случай $n=3$. В обосновании использовал теорию комплексных чисел. Далее доказали известные математики Л. Дирихле, А. Лежандр ($n=5$, 1825 г.), А. Лебег, Г. Ламе ($n=7$, 1839 г.), Э. Куммер ($n \leq 100$, 1847 г.), и наконец-спустя 350 лет в 1995 году доказал Э. Уайлс - для всех натуральных чисел $n \geq 3$. Однако, все перечисленные доказательства, за исключением случая $n=4$, нельзя считать простыми. Наша цель – доказать Великую теорему Ферма при $n=3$ способом, более понятным для школьников. Предложенное доказательство наверняка способствует развитию логического мышления и заинтересованности школьников к математической науке.

Вкратце остановимся на доказательстве: в доказательстве применен метод от противного и следующие определения. Будем писать $a \equiv 3$, если целое число a делится без остатка на 3, в противном случае - $a \not\equiv 3$, при этом не отрицательное число p , удовлетворяющее условиям $a \equiv 3^p$, $a \not\equiv 3^{p+1}$, называем показателем кратности a по 3 и обозначим $p = \omega(a)$. В доказательстве сначала убедимся в том, что $q \geq 2$, где $q = \omega(x + y + z)$, затем в ходе дальнейшего исследования показали $q=1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Ключевые слова: Великая теорема Ферма, доказательство от противного, взаимно однозначные числа, показатель кратности числа по 3.

Сраждинов А., физ.-мат. илимд. канд., проф.

Srazhidinov.adi@gmail.com

ORCID: 0009-0006-8303-6050

БатМУнун Кызыл-Кыя гуманитар.-педагогикалык институту
Кызыл-Кыя ш., Кыргызстан

МЕКТЕП ОКУУЧУЛАРЫНА АТАЙЫН КУРС: ФЕРМАНЫН УЛУУ ТЕОРЕМАСЫН $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ МИСАЛЫНДА ДАЛИЛДӨӨ

Математика дүйнөсүндө айтылышынын кыскалыгы менен да, маңызынын жөнөкөйлүгү менен да, көптөгөн сырлуу окуяларга чиеленишүүсү менен да алдына ат салдырбаган теорема болуп Ферманын Улуу теоремасы саналарын айта алабыз. $x^n + y^n + z^n = 0$ теңдемесинин нөл болбогон бүтүн сандарда чыгарылышынын жоктугун, мында $n \geq 3$ - натуралдык сан, 1637-жылы эле эң алгачкылардан болуп байкаган жана изилдеген улуу француз математиги, логик П. Ферма экендиги белгилүү. Кызыктуу жагдай – ал теореманын кооз дагы, жөнөкөй дагы далилдөөсүн тапкандыгын ашкере кылганында. Бирок далилдөөсүн жазма түрүндө калтырбаган. Бар болгону $n = 4$ үчүн далилдөөнү келтирген. 1758-жылы атактуу математик Л. Эйлер теореманы $n = 3$ үчүн далилдеген. Белгилеп кетчү нерсе – далилдөөдө комплекстүү сандар теориясы колдонулган. Ошондой эле белгилүү математиктер Л. Дирихле, А. Лежандр ($n = 5$, 1825 – ж.), А. Лебег, Г. Ламе ($n = 7$, 1839 – ж.), Э. Куммер ($n \leq 10$, 1847-ж.), ал эми арадан 350-жылдай өткөн соң, 1990-жылы англиялык белгилүү математик Э. Уайлс Ферманын Улуу теоремасын толук далилдеген. Бирок бардык далилдөөлөр, $n = 4$ төн башка учурлар үчүн, мектеп окуучуларынын өздөштүрүүсүнө татаалдык кылат. Биздин максат – ушул жагдайды эске алып, жөндөмдүү мектеп окуучуларына $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ теңдемеси үчүн Ферманын Улуу теоремасынын макалада келтирилген далилдөөсүн сунуштоо. Далилдөөнү өздөштүрүү мектеп окуучуларынын логикалык ой жүгүртүүсүн өнүктүрүүгө, математикага болгон кызыгуусун арттырууга жардам бермекчи.

Далилдөөдө тануу методу жана төмөнкүдөй аныктамалар колдонулат: эгерде a бүтүн саны $3k$ калдыксыз бөлүнсө, $a \equiv 3$, башка учурларда $a \not\equiv 3$ деп белгилейбиз. Ал эми терс эмес

бүтүн p саны $a \equiv 3^p$, $a \not\equiv 3^{p+1}$ шартын канааттандырса, $p = \omega(a)$ аркылуу белгилейбиз жана a нын $3k$ эселүүлүгүнүн көрсөткүчү деп атайбыз. Далилдөөдө адегенде $\omega(x + y + z) \geq 2$, андан аркы изилдөөдөн $\omega(x + y + z) = 1$ алынат, ошентип, карама-каршылыкка келебиз.

Түйүндүү сөздөр: Ферманын Улуу теоремасы, тануу методу, өз ара жөнөкөй сандар, сандын $3k$ эселүүлүгүнүн көрсөткүчү.

Srashidinov A., cand. of physical - mathem. sciences, assoc. professor

Srazhidinov.adi@gmail.com

ORCID: 0009-0006-8303-6050

*Kyzyl-Kiya humanitarian-pedag. Institute Batken state university
Kyzyl-Kiya c., Kyrgyzstan*

**SPECIAL COURSE FOR SCHOOLCHILDREN:
PROOF OF FERMAT'S GREAT THEOREM
BY EXAMPLE $x^3 + y^3 + z^3 = 0$**

It is difficult to find a person among mathematicians who is not familiar with and does not study the solution of the equation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, or $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ in integers. A generalization of this problem is Fermat's Last Theorem, which states that the equation $x^n + y^n + z^n = 0$ has no solutions in integers x, y, z and $xyz \neq 0$, $n \geq 3$ is a natural number. This theorem was formulated in 1637 by the great French mathematician and logician P. Fermat. And it was noticed that he found a truly amazing proof. However, P. Fermat did not leave a proof in writing, except for the case $n = 4$. In 1753, the famous mathematician L. Euler proved the case $n = 3$. In his justification, he used the theory of complex numbers. Then, famous mathematicians L. Dirichlet, A. Legendre ($n = 5$, 1825), A. Lebesgue, G. Lamé ($n = 7$, 1839), E. Kummer ($n \leq 100$, 1847) proved it, and finally, 350 years later, in 1995, A. Wiles proved it for all natural numbers $n \geq 3$. However, all the listed proofs, with the exception of the case $n=4$, cannot be considered simple. Our goal is to prove Fermat's Great Theorem for $n=3$ in a way that is more understandable for schoolchildren. The proposed proof will certainly contribute to the development of logical thinking and interest in mathematical science in schoolchildren.

Let us briefly dwell on the proof: the proof uses the method of contradiction and the following definitions. We will write $a \equiv 3$ if the integer a is divisible by 3 without remainder, otherwise - $a \not\equiv 3$, while a non-negative number p satisfying the conditions $a \equiv 3^p$, $a \not\equiv 3^{p+1}$ is called the exponent of the multiplicity of a by 3 and is denoted by $p = \omega(a)$. In the proof, we first verify that $q \geq 2$, where $q = \omega(x+y+z)$, then in the course of further research $q=1$. The resulting contradiction proves the theorem.

Key words: *Fermat's Last Theorem, proof by contradiction, one-to-one numbers, exponent of the multiplicity of a number by 3.*

Введение. Значение и история Великой теоремы Ферма довольно в популярной форме отражены в книге Сайман Сингх [1], адресованной широкой публике. С чувством большего уважения и глубокой признательности автору знаменитой головоломки - математической проблемы, мы считаем своим долгом начинать рассмотрение с формулировки предположения великого математика П. Ферма, оставившего запись в «Арифметике» Диофанта в 1637 году о том, что при любом натуральном числе $n \geq 3$ уравнение

$$x^n + y^n + z^n = 0, \quad xyz \neq 0$$

не имеет решений в целых числах.

В 1900 году выдающийся математик Гильберт в историческом докладе на II Парижском международном конгрессе математиков сформулировал двадцать три проблемы, одна из них – Великая теорема Ферма. По мнению Гильберта, эти проблемы имеют наиболее значение для развития математики.

Наконец-то, в 1995 году Великую теорему Ферма доказал известный математик Эндрю Уайлс [2,3]. А 27 июня 1997 года Э. Уайлсу вручена Геттингенским обществом

математиков премия Вольфскеля за полное доказательство Великой теоремы Ферма. О своем достижении Уайлс оценил скромно, что ему выпало счастье осуществить в взрослой жизни то, что было его мечтой в детстве [1]. Теорема при $n=4$ впервые доказана в 1637 году самим П. Ферма (см., например, [4]). В последствии этот самый простой из всех случаев рассмотрен и другими математиками [6,7]. Предлагаемый нами спецкурс преследует аналогичную цель, что и в работах [7] и других.

§1. **Доказательство** Великой теоремы Ферма при $n=3$. Точнее в заметке доказывается, на наш взгляд, простым способом следующая:

Теорема 1. Уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0, \quad xyz \neq 0 \quad (1)$$

не имеет решений в целых числах.

Доказательство проводим методом от противного. Предположим, что уравнение (1) имеет некоторое решение x, y и z в целых числах. Поэтому в равенстве (1) можем считать, что числа x, y и z взаимно простые:

$$D(x,y)=1, \quad D(x,z)=1, \quad D(y,z)=1. \quad (2)$$

Пользуемся обозначениями, точнее, будем писать:

- 1) $a \equiv b$, если целое число a делится без остатка на целое число b ;
- 2) $a \not\equiv c$, если целое число a не делится без остатка на целое число c ;
- 3) $\omega(a) = p$, если для целого числа a выполняются соотношения $a \equiv 3^p, a \not\equiv 3^{p+1}$ при некотором неотрицательном целом числе p ;

Число p называется показателем кратности a по 3.

Продолжим доказательство. Из тождества:

$$(a+b+c)^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c) + a^3 + b^3 + c^3,$$

справедливого для любой тройки действительных чисел (a, b, c) , при замене

$a = x, b = y, c = z$, имеем:

$$u^3 = 3(x+y)(x+z)(y+z), \quad (3)$$

где

$$u = x + y + z. \quad (4)$$

Из (1) непосредственно получаем

$$-x^3 = y^3 + z^3, \quad -x^3 = (y+z)((y+z)^2 - 3yz). \quad (5)$$

Из второго равенства (5) заключаем, что любой множитель суммы $y+z$ является множителем числа $-x^3$. В силу (2) одно и только одно из чисел делится на 3. Будем считать, что $x \not\equiv 3$. Поэтому $y+z \not\equiv 3$ и $(y+z)^2 - 3yz \not\equiv 3$.

Покажем, что

$$D(y+z, (y+z)^2 - 3yz) = 1. \quad (6)$$

Действительно, если предположить, что $D(y+z, (y+z)^2 - 3yz) = l$, то имеем:

$$\left. \begin{aligned} y+z &= lk_1 \\ (y+z)^2 - 3yz &= lk_2 \end{aligned} \right\}$$

где k_1 и k_2 некоторые целые числа. Так как $l \not\equiv 3$, то из второго уравнения последней системы получаем

$$l^2 k_1^2 - 3yz = lk_2. \quad (7)$$

Из равенства (7) заключаем, что на l делится произведение yz . Пусть $y \equiv l_1$,

$z \equiv l_2$, где $l_1 l_2 = l$. Тогда сумма $(y+z)$ делится на l_1 , отсюда, поскольку $y \equiv l_1$, следует, что $z \equiv l_1$. Так как $D(y, z) = 1$ получаем $l_1 = 1$. Аналогично получаем $l_2 = 1$. Тем самым имеем $l = 1$. Значит соотношение (6) имеет место. Совершенно аналогично в случае $y \equiv 3$, доказывается

$$D(x+z, (x+z)^2 - 3xz) = 1. \quad (8)$$

Поскольку $x \not\equiv 3, y \not\equiv 3$, то из равенств (5) и

$$-y^3 = (x+z)((x+z)^2 - 3xz), \text{ заключаем, что } (x+z) \not\equiv 3, (y+z) \not\equiv 3.$$

Так как правая часть равенства (3) кратна 3, то его левая часть кратна 3^3 . Следовательно, $(x+y) \equiv 3$ и $z \equiv 3$.

Покажем, что

$$D(3(x+y), \frac{1}{3}[(x+y)^2 - 3xy]) = 1. \quad (9)$$

Достаточно доказать, что $\frac{1}{3}[(x+y)^2 - 3xy] \not\equiv 3$. Что не возможно, поскольку $x \not\equiv 3, y \not\equiv 3$ и $(x+y) \equiv 3$. Значит имеет место (9). Из (6) в силу (8) следует, что

$$-x^3 = -x_1^3 x_2^3, \quad (10)$$

где

$$x_1^3 = y+z, \quad (11)$$

$$-x_2^3 = (y+z)^2 - 3yz.$$

Из равенства (10) имеем $x = x_1 x_2$. Совершенно аналогично получаем, что

$$y = y_1 y_2, \quad y_1^3 = x+z, \quad -y_2^3 = (x+z)^2 - 3xz, \quad (12)$$

$$z = z_1 z_2, \quad z_1^3 = 3(x+y), \quad -z_2^3 = \frac{(x+y)^2}{3} - xy, \quad (13)$$

Из (11) и соответствующих равенств (12) и (13) получаем

$$x + x_1^3 = u, \quad y + y_1^3 = u, \quad z + z_1^3/3 = u. \quad (14)$$

Аналогично, из (3) получаем $u^3 = x_1^3 y_1^3 z_1^3$, откуда

$$u = x_1 y_1 z_1. \quad (15)$$

Обозначим

$$\omega(z) = q, \quad q \geq 1. \quad (16)$$

Покажем, что $q \geq 2$. Так как $z = z_1 z_2$ и $z_2 \not\equiv 3$, то $\omega(z) = \omega(z_1) = q$. Поскольку

$$z_1^3 = 3(x+y), \text{ то}$$

$$3q = \omega(z_1^3) = \omega(3(x+y)) = 1 + \omega(x+y), \text{ откуда}$$

$$\omega(x+y) = 3q - 1, \quad (17)$$

или с учетом второго равенства (13), получаем

$$x+y = 3^{3q-1} \gamma_1^3, \quad \gamma_1 \not\equiv 3,$$

где γ_1 - некоторое целое число, определяемое соответствующим равенством (13).

Из (11) и (12) непосредственно имеем

$$x_1^3 + y_1^3 = (x+y) + 2z.$$

Откуда

$$(x_1 + y_1)((x_1 + y_1)^2 - 3x_1 y_1) = (x+y) + 2z. \quad (18)$$

С учетом соотношений (16) и (17) заключаем, что

$$\omega(x+y+2z) = \omega(2z) = q.$$

Значит левая часть (18) кратна 3. Тогда на 3 делится сомножитель $x_1 + y_1$.

Действительно, если предположить $x_1 + y_1 \not\equiv 3$, то $(x_1 + y_1)^2 \not\equiv 3$. В таком случае второй сомножитель $(x_1 + y_1)^2 - 3x_1 y_1 \not\equiv 3$, и следовательно, левая часть (18) не кратна 3, что противоречит равенству (18). Поэтому $x_1 + y_1 \equiv 3$, и следовательно, левая часть кратна 9. С учетом последнего утверждения из (18) сделаем заключение, что $q \geq 2$ и

$$\omega(x_1 + y_1) = q - 1, \quad q \geq 2. \quad (19)$$

Из равенства (14) непосредственно имеем:

$$x - y + x_1^3 - y_1^3 = 0. \quad (20)$$

Далее из (20) последовательно получаем:

$$(x_1 - y_1)(x_1^2 + y_1^2 + x_1 y_1) + x - y = 0,$$

$$(x_1 - y_1)[(x_1 - y_1)^2 + 3x_1 y_1] + (x + y) - 2y = 0.$$

Так как $x + y = 3^{3q-1} \gamma_1^3$, $\gamma_1 \neq 3$, то из последнего равенства следует соотношение

$$(x_1 - y_1)[(x_1 + y_1)^2 - x_1 y_1] - 2y \equiv 3^{3q-1}$$

причем $\omega\{(x_1 - y_1)[(x_1 + y_1)^2 - x_1 y_1] - 2y\} = 3q - 1$, т.е.

$$(x_1 - y_1)[(x_1 + y_1)^2 - x_1 y_1] - 2(u - y_1^3) \equiv 3^{3q-1}.$$

Откуда с учетом того, что $x_1 - y_1 = (x_1 + y_1) - 2y_1$, $x_1 - y_1 \neq 3$, имеем:

$$(x_1 + y_1)^2 (x_1 - y_1) - x_1^2 y_1 + x_1 y_1^2 - 2(u - y_1^3) \equiv 3^{3q-1}. \quad (21)$$

Так как $\omega[x_1 + y_1]^2 = 2\omega[x_1 + y_1] = 2q - 2$ и $3q - 1 > 2q - 2$ в силу (19), то из (21) получаем

$$-x_1^2 y_1 + x_1 y_1^2 - 2(u - y_1^3) \equiv 3^{2q-2}, \quad \text{т.е.}$$

$$(-x_1^2 y_1 + x_1 y_1^2 + 2y_1^3 - 2x_1 y_1 z_1) \equiv 3^{2q-2}, \quad (22)$$

причем

$$\omega(-x_1^2 y_1 + x_1 y_1^2 + 2y_1^3 - 2x_1 y_1 z_1) = 2q - 2.$$

Поскольку $y_1 \neq 3$, то сократив обе части (22) на y_1 , имеем

$$-x_1^2 + x_1 y_1 + 2y_1^2 - 2x_1 z_1 \equiv 3^{2q-2}. \quad (23)$$

Из левой части (23), очевидно, последовательно получаем

$$-(x_1^2 - y_1^2) + (x_1 + y_1)y_1 - 2x_1 z_1 \equiv 3^{2q-2},$$

$$\omega[(x_1 + y_1)y_1 - (x_1^2 - y_1^2) - 2x_1 z_1] = 2q - 2,$$

$$-(x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)y_1 - 2x_1 z_1 \equiv 3^{2q-2},$$

$$-(x_1 + y_1)x_1 + (x_1 + y_1)y_1 + (x_1 + y_1)y_1 - 2x_1 z_1 \equiv 3^{2q-2},$$

$$(x_1 + y_1)[2y_1 - x_1] - 2x_1 z_1 \equiv 3^{2q-2}, \quad (24)$$

причем $\omega[(x_1 + y_1)(2y_1 - x_1) - 2x_1 z_1] = 2q - 2$.

Так как $2y_1 - x_1 = 2(x_1 + y_1) - 3x_1$, то из (24) получаем

$$2(x_1 + y_1)^2 - 3x_1(x_1 + y_1) - 2x_1 z_1 \equiv 3^{2q-2}.$$

С учетом того, что $\omega(x_1 + y_1) = q - 1$, $\omega(x_1 + y_1)^2 = 2q - 2$, из последнего соотношения получаем

$$3x_1(x_1 + y_1) + 2x_1 z_1 \equiv 3^{2q-2}, \quad \omega[3x_1(x_1 + y_1) + 2x_1 z_1] = 2q - 2.$$

Сокращая обе части первого соотношения на x_1 , $x_1 \neq 3$, имеем

$$3(x_1 + y_1) + 2z_1 \equiv 3^{2q-2},$$

$$\omega[3(x_1 + y_1) + 2z_1] = 2q - 2. \quad (25)$$

Теперь покажем, что равенство (25) может выполняться только при $q = 1$.

Отсюда, поскольку по доказанному выше было $q \geq 2$, следует доказательство теоремы.

Из равенства $x_1^3 + y_1^3 = 2u - (x + y)$ получаем,

$$(x_1 + y_1)[(x_1 + y_1)^2 - 3x_1 y_1] = 2u - (x + y). \quad (26)$$

Обозначим $\sigma = (x_1 + y_1)$. Из (26) согласно равенствам (13) и (15) последовательно получаем

$$\sigma[\sigma^2 - 3x_1 y_1] = 2x_1 y_1 z_1 - z_1^3/3,$$

$$\sigma[\sigma^2 - 3x_1 y_1] = z_1[2x_1 y_1 - z_1^2/3].$$

Отсюда с учетом $z_2 + z_1^2/3 = x_1 y_1$ имеем

$$\sigma[\sigma^2 - 3x_1 y_1] = z_1[2z_1^2/3 + 2z_2 - z_1^2/3], \quad \text{т.е.}$$

$$\sigma[\sigma^2 - 3x_1 y_1] = z_1[z_1^2/3 + 2z_2].$$

Откуда, как и выше, заменив $x_1 y_1$ на $z_2 + z_1^2/3$, получаем

$$\sigma[\sigma^2 - 3 \cdot (z_1^3/3 + z_2)] = z_1(z_1^2/3 + 2z_2), \quad \text{т.е.}$$

$$\sigma^3 - \sigma z_1^2 - 3\sigma z_2 = z_1^3/3 + 2z_1 z_2. \quad (27)$$

Из уравнения (27) следует, что

$$(2z_1 + 3\sigma)z_2 = \sigma^3 - \sigma z_1^2 - z_1^3/3. \quad (28)$$

Сначала определим показатель кратности правой части (28) по 3. Так как

$$\omega(\sigma^3) = 3q - 3, \quad \omega(\sigma z_1^2) = \omega(\sigma) + 2\omega(z_1) = 3q - 1, \quad \omega(z_1^3/3) = 3q - 1. \quad (29)$$

Очевидно, что $3q - 3 < 3q - 1$, то из (29) находим:

$$\omega(\sigma^3 - \sigma z_1^2 - z_1^2/3) = 3q - 3. \quad (30)$$

Из равенства (28) в силу (30) определяем $\omega(2z_1 + 3\sigma) = 3q - 3$, т.е.

$$\omega(2z_1 + 3(x_1 + y_1)) = 3q - 3. \quad (31)$$

Сопоставив равенство (31) с (25), приходим к равенству $3q - 3 = 2q - 2$. Отсюда $q = 1$. Это противоречит установленному выше неравенству $q \geq 2$. Тем самым теорема доказана.

Замечание. Для тех, кто хочет обобщить теорему для $n \geq 3$, применением метода предложенного нами, наверняка придется не раз пользоваться следующим предложением.

Лемма Если a, b - целые числа и $a \neq n, b \neq n$, то при любом простом числе $n \geq 3$, выполнение условия

$$(a+b) \equiv n,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(a^n + b^n) \equiv n^2.$$

Доказательство непосредственно следует из следующего представления

$$a^n + b^n = (a+b) [(a+b)^{n-1} + \alpha_1(a+b)^{n-3}ab + \dots + \alpha_p(ab)^p],$$

где $p=(n-1)/2, \alpha_i \equiv n, i=1, 2, \dots, p$.

Заключение. Для полной разработки специального курса по элементам Великой теоремы Ферма, считаем необходимым, кроме рассмотренного случая $n=3$, добавить случай $n=4$ с целью, хотя бы ознакомить слушателей курса с методом бесконечного спуска Ферма. А также совсем не будет излишним заодно провести в качестве примера этого метода доказательство Эйлера для $n=5$. Для того чтобы привлечь отличившихся слушателей в большую науку, наверное будет разумной и задачей – обобщить рассмотренные случаи.

Литература:

1. Сингх, С. Великая теорема Ферма / С. Сингх. -М.: МЦНМО, 2000. -288 с.
2. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem// Ann. of Math., 1995. Vol. 142, P. 443-551.
3. Taylor R., Wiles A. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras// Ann. of Math., 1995. Vol. 142, P. 553-572.
4. Ферма, П. Исследования по теории и диофантову анализу / П. Ферма. - М.: Наука, 1992
5. Edwards H. M. Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory. -Springer, 1977.
6. Сраждинов, А., Абдраева, Н. И., Жалилов, М. М. Исследование элементарным методом уравнений, обобщающих великую теорему Ферма показателя 4 / А. Сраждинов., Н. И. Абдраева, М. М. Жалилов // Наука, новые технологии и инновации А Кыргызстана. 2021. - №8 – С. 8-9.
7. Салыков, С. С., Джапарова, С. Н., Салыкова, Н. С. О сочетании традиционных и современных методов обучения / С.С. Салыков, С. Н. Джапарова, Н. С. Салыкова // Вестник Иссык-Кульского университета. 2014. -№38 - С.91-95.